Interprétation de la théorie du G.E.C.

Cette étude a été envoyée à l'auteur d'un article à propos de son invention, le G.E.C. ou Générateur d'Energie Cinétique, dont l'url du site qui le décrit est disponible jusqu'à cette date en http://www.energiefutur.com/ . Son auteur, qui est aussi inventeur, clame la possibilité de créer de l'énergie cinétique sans source extérieure. Sa théorie se fonde sur une interprétation personnelle, mais erronée, d'une équation qu'il a trouvée, faisant intervenir l'énergie cinétique et le travail des forces centrifuges. La principale erreur qui a été commise a été de confondre système isolé avec système en régime entretenu.

Mon étude est un peu longue, mais je la pense exhaustive. Le niveau requis est Math sup ou 1er cycle universitaire scientifique.

Bonne lecture.

Sans perte de généralité, on considère que l'inertie d'une masse par rapport à un axe passant par son centre est négligeable, et on considère que l'inertie du reste de l'équipage mobile est négligeable aussi. De plus, on ne regarde qu'une seule masse, car cela n'apporte rien de considérer deux masses dont le comportement est symétrique. On définit la variable r comme la distance (en m) du centre de la bille à l'axe de rotation le long du coulisse, ω comme la vitesse de rotation (en rad/s) du système entraîné, et ω_0 la vitesse de rotation initiale du système isolé. Les valeurs R1 et R2 sont les valeurs respectives de r telles que r=R1 correspond à la position initiale de la bille, et r=R2 > R1 est une position par laquelle la bille passe durant l'explosion froide. Le temps est repéré par la variable t (en s), et j'appelle T le temps qui s'est écoulé depuis le moment où la bille a « décollé » de sa position r=R1 et coïncide avec r=R2 . Finalement on appelle m la masse d'une seule bille (m est en kg).

D'après votre théorie, l'énergie cinétique du système considérant toutes les simplifications ci-dessus est:

(1) $$Ec=\frac{1}{2}I\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2=\frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

sachant que $d\theta / dt = \omega$ (soit $\theta = \omega t$)

Le travail de la force centrifuge pour passer de r=R1 à r=R2 s'exprime par l'intégrale:

(2) $$W_{centrifuge}=\int mr\omega^2 dr=\frac{1}{2}m\omega^2(R2^2-R1^2)$$

Sachant que $Ec|_{r=R2}-Ec|_{r=R1}$ d'après la formule (1) vaut

(3) $$\Delta Ec=\frac{1}{2}m\omega^2(R2^2-R1^2)$$

On en déduit que l'augmentation d'énergie cinétique du système entre les moments où r=R1 et r=R2 *si on était en régime entretenu* (à la vitesse ω) est exactement égale au travail de la force centrifuge pour que la bille passe de r=R1 à r=R2. *En régime isolé*, il suffirait donc de récupérer ce travail et de l'injecter au système pour obtenir une augmentation d'énergie cinétique gratuite (sans apport d'effort extérieur) donnée par (3).

Dans la réalité, cette formulation contient deux inexactitudes.

1re erreur: l'énergie cinétique du système N'EST PAS donnée par (1) car cette formule ne comprend pas la part d'énergie cinétique de translation de la bille dans son repère tournant $E_{c\text{-}tr}$. La vraie formule est Ec= $E_{c\text{-}rot}$ + $E_{c\text{-}tr}$, soit

(4) $$Ec=\frac{1}{2}mr^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{dt}\right)^2$$

Le premier terme $E_{c\text{-}rot}$ traduit la rotation de la bille autour de l'axe: nous l'appellerons énergie cinétique de rotation pure. Le second terme $E_{c\text{-}tr}$ traduit le fait que la vitesse radiale de la bille dans le repère tournant n'est pas nulle à l'instant t. Nous l'appellerons énergie cinétique de translation radiale.

2e erreur: c'est que précisément les choses ne se passent pas de la même façon suivant que le système est isolé ou entraîné: de cela vous en parlez au début de votre article, mais vous n'en parlez plus par la suite.

1) **Dans le cas où le système est isolé,** il ne reçoit pas de travail de l'extérieur, son énergie cinétique ne doit pas varier (c'est ce que dit en substance là première loi de la Thermodynamique). En conséquence de quoi ce système ne PEUT PAS tourner à vitesse constante, car il doit satisfaire à la loi de conservation du moment cinétique. Lorsque la bille passe de r=R1 à r=R2 durant l'explosion froide, sa vitesse radiale n'est plus nulle (sauf dans le cas où il y a une butée, nous y reviendrons plus loin), et la vitesse de rotation de l'ensemble a diminué suivant la formule:

(5) $$\frac{d\theta}{dt}(r=R2)=\left(\frac{R1}{R2}\right)^2\omega_0 \qquad (R2 > R1)$$

on montre (voir Annexe 1) que dans ce cas, l'énergie cinétique donnée par (4) se conserve: la part d'énergie qui « disparaît » de $E_{c\text{-}rot}$ eu égard à la décroissance de vitesse de rotation se retrouve dans l'énergie cinétique de translation radiale $E_{c\text{-}tr}$ (voir Annexe 2). **Dans le cas où la bille rencontrerait une butée en r=R2**, le terme $E_{c\text{-}tr}$ se transforme intégralement en chaleur après un choc ou une succession de chocs semi-élastiques sur la butée. Il ne reste donc plus que $E_{c\text{-}rot}$ à la fin, c'est à dire l'énergie cinétique apparente, donnée par la formule (1).

2) **Dans le cas où on pose ω constant**, le système n'est pas isolé mais entraîné à telle fin qu'il tourne TOUJOURS à la vitesse ω: *ceci ne peut se faire qu'en le couplant à un moteur susceptible de fournir du travail au système.* La seule force qui travaille est la réaction du coulisse sur la masse, et on montre facilement que cette réaction R n'est autre que la force de Coriolis. Tout calcul fait, l'accroissement d'énergie cinétique étant égal au travail de cette force R le long du mouvement, on trouve que (voir Annexe 3)

(6) $$Ec|_{r=R2} - Ec|_{r=R1} = m\,\omega^2\,(R2^2 - R1^2)$$

C'est à dire que l'accroissement d'énergie cinétique entre r=R1 et r=R2 est précisément égal au DOUBLE de ce que donnait votre formule (3).

Comment se distribue cet accroissement d'énergie cinétique? C'est là qu'on retrouve votre formule.

La part donnant lieu à un accroissement d'énergie cinétique de translation radiale Δ Ec-tr s'écrit comme le travail de la force centrifuge. En régime entretenu, ce travail est donné par (2), soit exactement la moitié de (6). L'autre moitié $\Delta E_{c\text{-}rot}$ est la part due à l'accroissement d'énergie cinétique de rotation pure, toujours en régime entretenu. Votre formule (1), (2) et (3) traduit simplement le fait que la part due à l'accroissement $\Delta E_{c\text{-}rot}$ est égale au travail de la force centrifuge, et ce, en régime entretenu. **Cela est dû au fait que précisément les deux parts dues à l'accroissement d'énergie cinétique de rotation pure et à l'accroissement d'énergie cinétique due à la la translation radiale sont égales:** $\Delta E_{c\text{-}rot} = \Delta E_{c\text{-}tr} = W_{centrifuge}$ et donc $\Delta E_{c\text{-}rot} + \Delta E_{c\text{-}tr} \neq 0$. *Ces accroissements ne sont possibles (et égaux) que parce que le système reçoit de l'énergie de l'extérieur*, vu qu'on se place en régime entretenu. En régime « isolé », on a $\Delta E_{c\text{-}rot} + \Delta E_{c\text{-}tr} = 0$. Ce qu'il faut retenir de tout cela, c'est que malgré le fait que votre formule soit mathématiquement juste, elle ne traduit pas ce que vous pensez (voir votre papier) et surtout elle est fausse dans l'hypothèse d'un système isolé.

Annexe 1 : équations du mouvement dans le cas d'un système isolé

En toute généralité, on montre facilement que les composantes radiales et ortho-radiales de l'accélération dans un repère tournant s'écrivent:

(A1) $\gamma_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$

(A2) $\gamma_\theta = 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} + r\frac{d^2\theta}{dt^2}$

L'équation du mouvement est donnée par

(A3) Σ Fr = m γ_r = 0

d'où:

(A4) $\frac{d^2 r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = 0$

Sachant que le moment cinétique se conserve, on a la relation

(A5) $\frac{d\theta}{dt} = \frac{R1^2}{r^2}\omega_0$

où ω_0 est la vitesse initiale à laquelle on a lancé le système. L'injection de (A5) dans (A4) donne:

(A6) $\frac{d^2 r}{dt^2} - \frac{R1^4}{r^3}\omega_0^2 = 0$

Équation différentielle du second ordre à coefficients non constants, qu'on ne sait pas résoudre.

Cependant, sachant que R = m γ_θ , (la réaction est égale à la force de Coriolis), le travail de cette réaction durant le passage de r=R1 à r=R2, et donc l'accroissement d'énergie cinétique du système (Cf théorème de l'énergie cinétique) est donné par:

(A7) $\Delta Ec = W = \int m\gamma_\theta r\, d\theta$

Mais l'injection de (A5) dans (A2) donne l'identité remarquable:

(A8) $\gamma_\theta = 0$

Ce qui fait que (A7) devient:

(A9) Δ Ec = 0

On retrouve le fait que l'énergie cinétique d'un système isolé se conserve.

Annexe 2 : par où passe l'excédent d'énergie cinétique

Si on considère la variation d'énergie cinétique apparente due à la diminution de la vitesse de rotation, alors

(A10) $\Delta E_{c-rot} = \frac{m}{2}\left(\frac{R1^2}{R2^2} - 1\right) R1^2 \omega_0^2$

où $E_{c-rot} = \frac{1}{2} m r^2 \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ est le terme de rotation pure seul, et aussi l'énergie cinétique apparente.

Mais l'énergie cinétique prend aussi en compte un terme de translation radiale E_{c-tr} – voir (4).

En appliquant le théorème de l'énergie cinétique à la force centrifuge, on obtient:

(A11) $\Delta E_{c-tr} = \int m \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 r\, dr$

Soit, en utilisant (A5):

(A11) $\Delta E_{c-tr} = \int m \omega_0^2 R1^4 \frac{dr}{r^3}$

soit

(A11) $\Delta E_{c-tr} = \frac{m}{2}\left(1 - \frac{R1^2}{R2^2}\right) R1^2 \omega_0^2$

et on trouve que $\Delta E_{c-tr} = - \Delta E_{c-rot}$, c'est à dire que la part d'énergie apparente disparue se retrouve dans la part due à la translation radiale de la bille.

Finalement $\Delta Ec = \Delta E_{c-tr} + \Delta E_{c-rot} = 0$

Annexe 3: équations du mouvement dans le cas d'un système entraîné

On écrit maintenant:

(A12) $\theta = \omega t$, soit $d\theta / dt = \omega$

En injectant (A12) dans (A3) on trouve:

(A13) $\frac{d^2 r}{dt^2} - \omega^2 r = 0$

Equation différentielle du second ordre à coefficients constants, qu'on sait résoudre.

Tout calcul fait, et avec les conditions initiales sur le temps suivantes:

$r|_{t=0} = R1$ et $dr / dt|_{t=0} = 0$

on a:

(A14) $r = R1 \, ch \, \omega t$

Où ch est un cosinus hyperbolique; voir Annexe 4 pour définition.

Le calcul de l'accroissement d'énergie cinétique peut se faire de deux façons: l'une employant explicitement la variable temps, et l'autre non.

1) Méthode utilisant l'expression de l'énergie en fonction du temps:

On reprend (4), c'est à dire $Ec = \frac{m}{2}[(\frac{dr}{dt})^2 + r^2 \omega^2]$

On trouve tout calcul fait, que:

(A15) $Ec = \frac{m}{2} \omega^2 R1^2 (ch^2 \omega t + sh^2 \omega t)$

Si on se place au temps T lorsque r=R2 (rappel: t=0 si r=R1) alors on a d'après (A14)

$ch^2 \omega T = (R2 / R1)^2$ et $sh^2 \omega T = (R2 / R1)^2 - 1$

ceci d'après une propriété connue des fonctions trigonométriques hyperboliques (voir Annexe 4).

Alors

(A16=6) $Ec|_{t=T} - Ec|_{t=0} = m \, \omega^2 (R2^2 - R1^2)$

2) Méthode utilisant le théorème de l'énergie cinétique et ne faisant pas apparaître explicitement le temps.

On écrit le théorème de l'énergie cinétique sur la seule force qui travaille, à savoir la réaction du coulisse sur la masse.
D'abord, l'accélération de Coriolis s'écrit, en substituant (A12) dans (A2):

(A17) $\gamma_\theta = 2\ \omega\ dr\ /\ dt$

La réaction du coulisse s'écrit donc:

(A18) $R = 2\ m\ \omega\ dr\ /dt$

Le théorème de l'énergie cinétique s'écrit:

(A19) $\Delta Ec = \int R\, r\, d\theta$

(A19) $\Delta Ec = \int 2 m \omega^2 r\, dr$ avec $d\theta = \omega\ dt$

Finalement:

(A19 = A16 = 6) $\Delta Ec = Ec|_{t=T} - Ec|_{t=0} = m\ \omega^2\ (R2^2 - R1^2)$

Annexe 4: fonctions de trigonométrie hyperboliques

On définit les fonctions ch x et sh x appelées *resp.* cosinus et sinus hyperbolique sous la forme

$$ch\,x=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad sh\,x=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}$$

ce sont les parties *resp.* paire et impaire de la fonction exponentielle.

Elles vérifient $ch^2x - sh^2x = 1$.

La valeur X telle que ch X = x pour x donné s'appelle l'argument du cosinus hyperbolique , et se tire de la formule:

X = Arg ch x = $\ln(\sqrt{x^2-1}+x)$

Dans le problème , $T=\frac{1}{\omega}\,Arg\,ch(\frac{R2}{R1})$