Interprétation de la théorie du G.E.C. (part. 2)

Pour rappel, suivant qu'on soit en régime isolé ou entretenu, on obtient deux équations du mouvement :

(1) $$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{R1^4}{r^3}\omega_0^2 = 0$$

Equation notée (A6) sur le premier document, et dont il était dit qu'on ne savait pas la résoudre.

Dans le cas d'un système entretenu à la vitesse ω , l'équation du mouvement devenait :

(2) $$\frac{d^2r}{dt^2} - \omega^2 r = 0$$

Equation notée (A13), linéaire du second ordre à coefficients constants, dont la solution (qui tient compte des conditions initiales) est de la forme :

(3) $r = R1 \text{ ch } \omega t$

Il se trouve que l'équation (1) en régime isolé a une solution « évidente » : lorsqu'une masse n'est soumise à aucun effort, son mouvement est simplement rectiligne uniforme! On arrive ainsi à montrer que la solution de (1) s'écrit, compte tenu des conditions initiales :

(4a) $$r = \frac{R1}{\cos\theta}$$

(4b) $$\theta = Arctg(\omega_0 t)$$

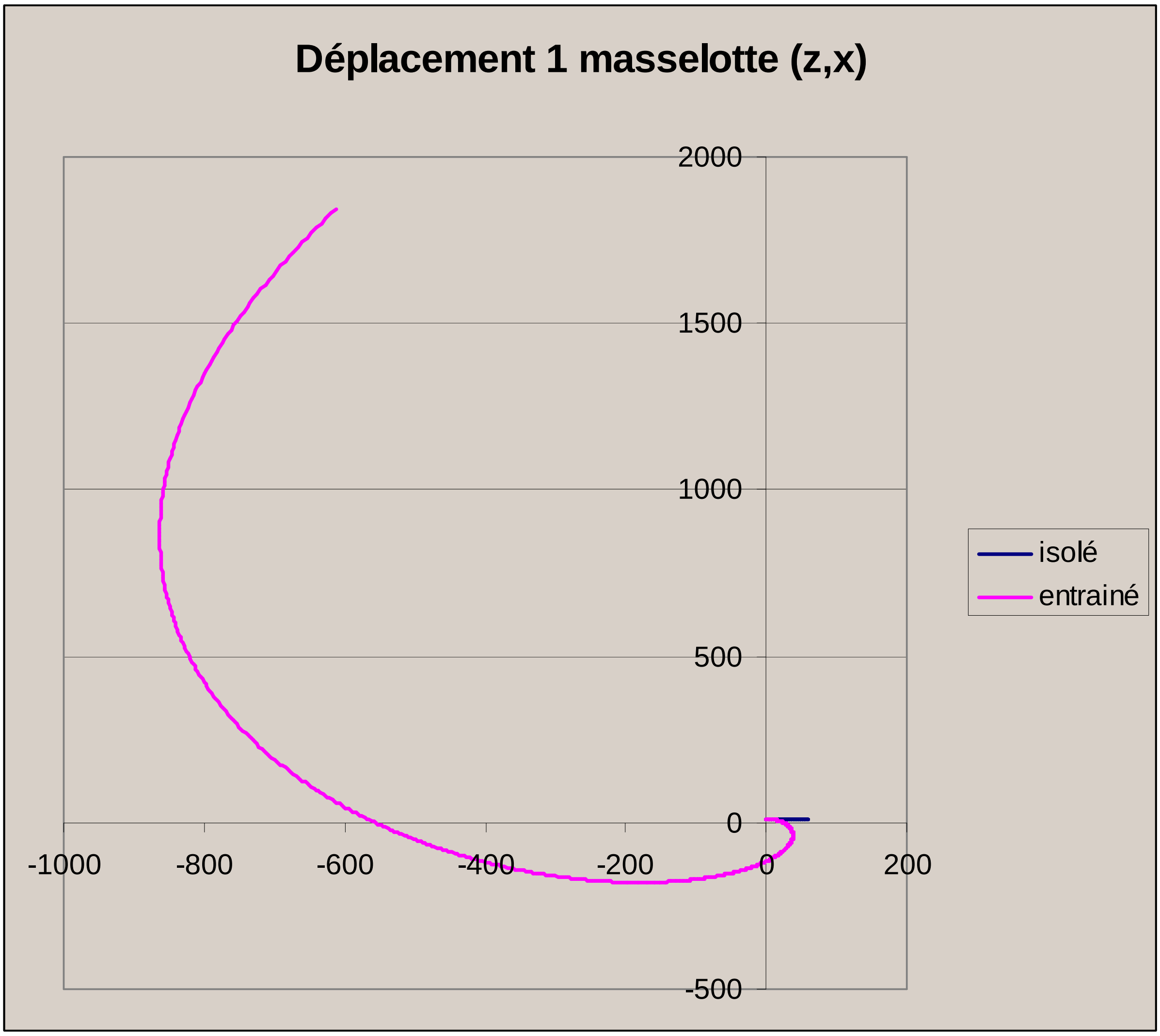
Ceci donne explicitement la variation du rayon polaire r en fonction du temps. Si l'on passe des coordonnées polaires aux coordonnées cartésiennes par le changement de variable :

$x = r \cos \theta$ et $z = r \sin \theta$

alors on trouve que $y = R1$ et $z = R1\ \omega_0\ t$, c'est-à-dire que la masse se déplace à la distance R1 de l'axe avec un mouvement rectiligne uniforme de vitesse constante $v_0 = R1\ \omega_0$. C'est typiquement ce qui se produit quand on fait tournoyer une pierre avec une fronde, puis qu'on lâche la pierre : celle-ci se met à tourner à la vitesse $R1.\ \omega_0$ puis continue en ligne droite (en supposant que la pesanteur est absente) à la même vitesse.

Un autre point important à souligner, c'est que si on considère que la coulisse est d'étendue infinie, entre le moment où la masse est lâchée à une vitesse initiale de rotation ω_0 et le moment où elle s'arrête (théoriquement au bout d'un temps infini), la position angulaire θ décrivant une coordonnée polaire de la masse, et donc **la coulisse** elle-même, **n'a effectué qu'un quart de tour !**

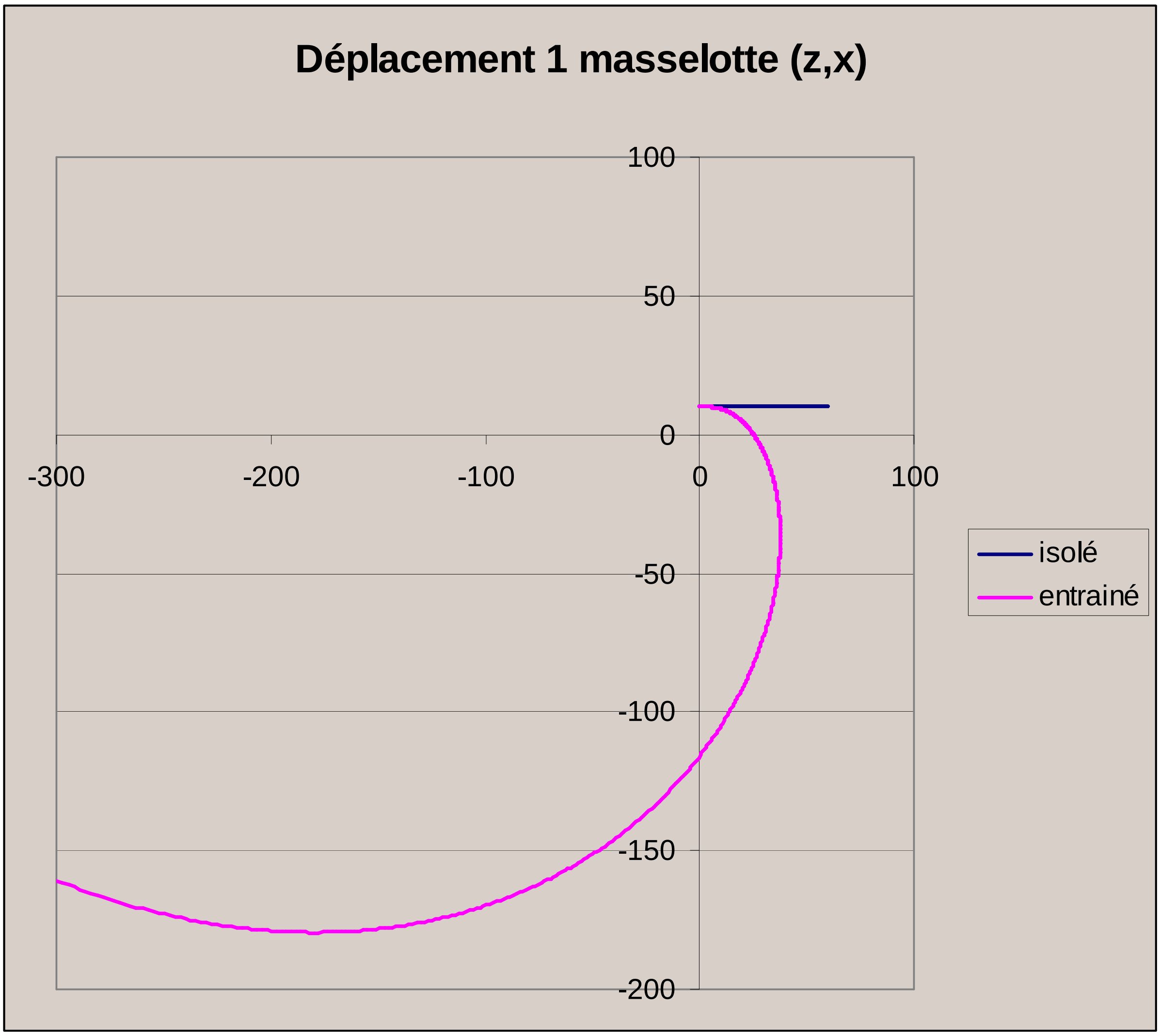
Les figures suivantes montrent les trajectoires comparatives d'une masselotte, l'une (en bleu) en système isolé lâchée à la vitesse angulaire ω, et l'autre (en violet) soumise à un régime entretenu à la vitesse angulaire ω. On prend ω = 1000 RPM (=104.7 rad/s) et on regarde ce qui se passe pour un intervalle de temps très court.



w=	104.72	rad/s
R1=	10	mm
Temps t	5.70E-02	s

Distance maximale

Dist masse entrainé	1956	mm
Dist masse isolé	60	mm
w final isolé	2.864	rad/s
	27.35	RPM
Vitesse isolé	1047	mm/s



La même courbe grossie plusieurs fois

Vitesse isolé	1.047	m/s
Vitesse entrainé	289.6	m/s
Delta Ec=	419.41	J

Energie cinétique finale isolé : 0.005 J
Energie cinétique finale entraîné : 419 J

L'énergie cinétique est donnée pour une masselotte de 10g. Les différences sont énormes, surtout si on considère la coulisse d'extension infinie.

En conclusion, en supposant que l'on découple le moteur, donc qu'on se place en régime isolé à la vitesse ω_0, il paraît peu probable qu'on puisse accélérer à nouveau le système au point de le maintenir à une vitesse de rotation constante, car les énergies mises en jeu ne sont pas du tout du même ordre. On peut éventuellement l'imaginer pour une durée « très courte » (quelques ms).